

On a exposé quelles devaient être les bases fondamentales sur lesquelles devait reposer une évaluation qui ne s'appuierait pas sur des mesures d'accroissements mais qui serait orientée vers la quantification d'une situation optimale au plan physiologique; des critères d'appréciation relatifs à différents niveaux d'approvisionnement ont été présentés à titre d'exemples.

J. M.

## 8. Literatur

- ALTHERR, E., EVERS, F. H. und LINNERT, H.: Erste Ergebnisse von Fichten-Düngungsversuchen auf Feuersteinlehmstandorten des Wuchsbezirkes „Nördliches Härdsfeld“ (Ostalb). AFJZ 145, 101–111. J. D. Sauerländer Verlag, Frankfurt 1974a
- ALTHERR, E. und EVERS, F. H.: Unerwarteter Düngungserfolg bei Magnesiummangel in einem jungen Buchenbestand auf mittlerem Buntsandstein des Odenwaldes. AFJZ 145, 121–124. J. D. Sauerländer Verlag, Frankfurt 1974b
- ALTHERR, E. und EVERS, F. H.: Magnesium-Düngungseffekt in einem Fichtenbestand des Buntsandstein-Odenwaldes. AFJZ 146, 217–225. J. D. Sauerländer Verlag, Frankfurt 1975
- ALTHERR, E. und EVERS, F. H.: Nachweis eines Magnesium-Düngungseffektes in einem Buchenbestand auf mittlerem Buntsandstein des Odenwaldes. AFJZ 148, 45–48. J. D. Sauerländer Verlag, Frankfurt 1977
- FIEDLER, H. J., NEBE, W. und HOFFMANN, F.: Forstliche Pflanzenernährung und Düngung. Gustav Fischer Verlag, Stuttgart 1973
- GUSSONE, H. A.: Faustzahlen für Düngung im Walde. BLV-Verlag, München 1964
- HÜTTL, R.: „Neuartige“ Waldschäden und Nährelementversorgung von Fichtenbeständen (*Picea abies* KARST.) in Südwestdeutschland. Freiburger Bodenkundliche Abhandlungen. Hrsg.: Institut für Bodenkunde und Waldernährungslehre der Albert-Ludwig-Universität, Freiburg i. Br. 1985

- MITSCHERLICH, G. und WITTICH, W.: Düngungsversuche in älteren Beständen des Forstamtes Lutter a. B. Aus dem Walde, Mitteilungen der Niedersächsischen Landesforstverwaltung, Heft 6, 77–108, 1963
- REEMTSMA, J. B.: Untersuchungen an Fichte und anderen Nadelbaumarten über den Nährstoffgehalt der lebenden Nadeljahrgänge und der Streu. Dissertation, Forstliche Fakultät der Georg-August-Universität, Göttingen 1964
- REEMTSMA, J. B.: Untersuchungen über den Nährstoffgehalt der Nadeln verschiedenen Alters an Fichte und anderen Nadelbaumarten. Flora, Abt. B, Bd. 156, S. 105–121. VEB Gustav Fischer Verlag, Jena 1966
- REEMTSMA, J. B.: Nadelanalytische Untersuchungen an Fichte (*Picea abies*) nach Grünästung und Düngung. Schriften aus der Forstlichen Fakultät der Universität Göttingen und der Niedersächsischen Forstlichen Versuchsanstalt, Band 59. J. D. Sauerländer Verlag, Frankfurt 1979
- REEMTSMA, J. B.: pH-Werte niedersächsischer Fichtenbestände. FHW, 293. Schaper's Verlag, Hannover 1986
- SEIBT, G., WITTICH, W. und REEMTSMA, J. B.: Ertragskundliche und bodenkundliche Ergebnisse langfristiger Kalkungsversuche im nord- und westdeutschen Bergland. Schriftenreihe der Forstlichen Fakultät der Universität Göttingen und Mitteilungen der Niedersächsischen Forstlichen Versuchsanstalt, Band 50. J. D. Sauerländer Verlag, Frankfurt 1977
- ULRICH, B., MAYER, R. und KHANNA, P. K.: Deposition von Luftverunreinigungen und ihre Auswirkungen in Waldökosystemen im Solling. Schriften aus der Forstlichen Fakultät der Universität Göttingen und der Niedersächsischen Forstlichen Versuchsanstalt, Band 58. J. D. Sauerländer Verlag, Frankfurt 1979
- WITTICH, W.: Die mineralische Eigenart der Böden des nordwestdeutschen Tieflandes mit ihren langzeitlichen Veränderungen und ihre Bedeutung im Wald. Schriftenreihe der Forstlichen Fakultät Göttingen und Mitteilungen der Niedersächsischen Forstlichen Versuchsanstalt, Band 42. J. D. Sauerländer Verlag, Frankfurt 1971

# Markov-Ketten zur Beschreibung von Schadzustand und Schadentwicklung der Hauptbaumarten Bayerns

(Mit 1 Abbildung und 1 Tabelle)

Von TH. SMALTSCHINSKI

(Angenommen Februar 1986)

## 1. EINFÜHRUNG

Der prozentuale Laubverlust ist das am häufigsten beobachtete Symptom der „neuartigen Walderkrankung“. Bei den Außenaufnahmen wird nicht der exakte Wert des Laubverlustes bestimmt, sondern eine Schadklasse. In Deutschland hat folgende Klassifikation die weiteste Verbreitung gefunden: 0–10 % ( $S_0$  keine Schädigung), 11–25 % ( $S_1$  schwache Schädigung), 26–60 % ( $S_2$  mittlere Schädigung), 61–99 % ( $S_3$  starke Schädigung) und 100 % ( $S_4$  abgestorben).

Setzt man als Versuchsanlage eine Folge periodischer jährlicher Schadaufnahmen an identischen Bäumen voraus, dann gehen durch die übliche Zusammenstellung der Aufnahmewerte in statischen Häufigkeitsverteilungen Informationen über Dynamik und Veränderung der Schädigung verloren. Aus diesen Darstellungen ist nicht ersichtlich, mit welcher Häufigkeit Bäume von einer Schadklasse in eine andere wechseln oder verbleiben. Diese Veränderungen lassen sich durch Darstellung in Matrizen wesentlich günstiger nachzeichnen. Erweist sich die relative Wandergeschwindigkeit einer Baumart zwischen allen möglichen Schadklassenkombinationen bei weiteren Aufnahmen als einigermäßen konstant, so ist aus den Matrizen der zukünftige Schadzustand und die mittlere Lebenserwartung der beobachteten Bäume berechenbar.

Die dieser Arbeit zugrunde liegenden Aufnahmewerte stammen aus der Bayerischen Forstlichen Versuchs- und Forschungsanstalt, die für den Freistaat in der Periode 1983 bis 1985 flächendeckende Schadinventuren durchgeführt hat (KENNEL et al., 1985). Von diesen

Aufnahmewerten fanden nur markierte Bäume mit Folgeansprache Verwendung (ab Alter > 6). Weiterhin wurden normal genutzte Bäume ausgesondert. Die Gesamtzahl der untersuchten Bäume lag damit bei ca. 46 000. Die einzelnen Baumarten wurden zu folgenden Baumartengruppen zusammengefaßt: Fi/Ta (Fichte, Tanne und Douglasie), Ki/Lä (Kiefer, Lärche und sonst. Nadelholz), Bu (Buche und sonst. Laubholz) und Ei (Eiche).

Bei Herrn Dr. E. KENNEL, der diese Daten großzügig zu Verfügung stellte, möchte ich mich herzlich bedanken.

## 2. BERECHNUNGSGRUNDLAGEN

Die Veränderung des Schädigungsgrades und die Absterberate von Waldbäumen sollen über Markov-Ketten mit diskretem Zustands- und Parameterraum abgebildet werden. Da eine Darstellung der Gesamtheorie einen erheblichen Umfang benötigen würde, seien nur die notwendigsten Elemente derselben aufgeführt (weiterführende Literatur FAHRMEIR et al., 1981; FELLER, 1966).

Nimmt man die eingangs erwähnte Schadeinteilung  $S_0 \dots S_4$  (kürzer 0 ... 4) als Raum E der möglichen Zustände, setzt man eine jährlich wiederholte Schadansprache an N identischen Bäumen einer Baumart oder Baumartengruppe voraus und bezeichnet durch die Parameter  $t, t+1, t+2 \dots (t \text{ aus } \mathbb{N}_0)$  die Zeitpunkte der Aufnahmen, so lautet der Vektor der Schadhäufigkeiten zum Zeitpunkt t:

$$N^t = (N_0^t, N_1^t, N_2^t, N_3^t, N_4^t).$$

Der untere Index der Tupel des Vektors  $N^t$  bezeichnet die Zugehörigkeit zu der entsprechenden Schadklasse. Die Wahrscheinlichkeit  $P\{S_t = i\}$ , daß sich zu einem Zeitpunkt  $t$  ein gewisser Zustand  $S_t$  eingestellt hat, heißt Zustandswahrscheinlichkeit  $p_i(t)$ . Der Zeilenvektor  $p(t) = (p_i(t))$  heißt Zustandsverteilung. Die Zustandsverteilung gibt einfacher ausgedrückt die „relativen Häufigkeiten“ der möglichen Zustände an.

Beispiel: Baumartengruppe: Fichte/Tanne  
Aufnahmejahr:  $t = 1983 \dots 1985$   
Stammzahl:  $N = 25679$

Schadhäufigkeiten:  
 $N^{1983} = (6804, 13741, 4500, 531, 103)$   
 $N^{1984} = (3185, 9695, 11637, 1005, 157)$   
 $N^{1985} = (2828, 8017, 12971, 1654, 209)$

Zustandsverteilungen:  
 $p(1983) = (0,265, 0,535, 0,175, 0,021, 0,004)$   
 $p(1984) = (0,124, 0,378, 0,453, 0,039, 0,006)$   
 $p(1985) = (0,110, 0,312, 0,505, 0,064, 0,008)$

Für einen Baum der Schadklasse  $i$  ( $i = 0 \dots 3$ ) wird bei der Wiederholungsaufnahme ein Übergang nach  $j$  ( $j = 0 \dots 4$ ) beobachtet, wobei für die Schadklasse 4 gilt, daß er zwangsläufig in dieser verbleibt. Werden alle Bäume eines Zustandes  $S_i$  zusammengefaßt, so ergeben sich für die Übergänge von den Schadklassen  $i$  nach  $j$  (i. Z.  $i \rightarrow j$ ) gewisse Häufigkeiten  $N_{ij}$ . Anschaulicher sieht dieser Zusammenhang in einem Matrizen-tabelleau (2.1) aus:

$$N^{t+1} = (N_0^{t+1}, N_1^{t+1}, N_2^{t+1}, N_3^{t+1}, N_4^{t+1})$$

$$N^t = \begin{matrix} N_0^t \\ N_1^t \\ N_2^t \\ N_3^t \\ N_4^t \end{matrix} \begin{matrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{matrix} \begin{matrix} N_{00} & N_{01} & N_{02} & N_{03} & N_{04} \\ N_{10} & N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{20} & N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ N_{30} & N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} \\ N_{40} & N_{41} & N_{42} & N_{43} & N_{44} \end{matrix} \quad (2.1)$$

Die Summen der Zeilen und Spalten ergeben die Tupel der Schadvektoren zu den Aufnahmezeitpunkten  $t$  und  $(t+1)$ . Die Übergangshäufigkeiten der Jahre 1983 und 1984 sind Tabelle 1 zu entnehmen.

Tab. 1

Baumartengruppe Fichte/Tanne, Schadvektoren  $N^{1983}$  und  $N^{1984}$  und Übergangshäufigkeiten  $N_{ij}$   
Tree species group spruce/fir, damage vectors and transition frequencies

$N^{1984}$	=	(3185, 9695, 11637, 1005, 157)																																			
		$S_0 \quad S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4$																																			
$N^{1983}$	=	<table border="1"> <tr> <td>6804</td> <td><math>S_0</math></td> <td>1552</td> <td>2970</td> <td>2216</td> <td>62</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>13741</td> <td><math>S_1</math></td> <td>1482</td> <td>5635</td> <td>6365</td> <td>255</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>4500</td> <td><math>S_2</math></td> <td>144</td> <td>1067</td> <td>2853</td> <td>431</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>531</td> <td><math>S_3</math></td> <td>7</td> <td>23</td> <td>203</td> <td>257</td> <td>41</td> </tr> <tr> <td>103</td> <td><math>S_4</math></td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>103</td> </tr> </table>	6804	$S_0$	1552	2970	2216	62	4	13741	$S_1$	1482	5635	6365	255	4	4500	$S_2$	144	1067	2853	431	5	531	$S_3$	7	23	203	257	41	103	$S_4$	0	0	0	0	103
6804	$S_0$	1552	2970	2216	62	4																															
13741	$S_1$	1482	5635	6365	255	4																															
4500	$S_2$	144	1067	2853	431	5																															
531	$S_3$	7	23	203	257	41																															
103	$S_4$	0	0	0	0	103																															

Dividiert man die Übergangshäufigkeiten einer Zeile durch das entsprechende Tupel der Schadhäufigkeiten, so erhält man die Übergangswahrscheinlichkeit  $p_{ij}$  für den Übergang  $i \rightarrow j$ :

$$p_{ij} = N_{ij} / N_i^t \quad (2.2)$$

$p_{ij}$  ist ein Maximum Likelihood Schätzwert für die entsprechenden Übergangshäufigkeiten (Beweis: FAHRMEIR et al., 1981, S. 66 ff). Das Häufigkeitstabelleau wandelt sich dadurch zu einer quadratischen Übergangsmatrix  $P$ :

$$P = (p_{ij}) = \begin{bmatrix} P_{00} & \dots & P_{04} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{40} & \dots & P_{44} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$P$  hat per Konstruktion die Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \text{für alle } i, j \text{ aus } E \text{ gilt: } & p_{ij} \geq 0; \\ \text{für alle } j \text{ aus } E \text{ gilt: } & \sum_{i \in E} p_{ij} = 1 \end{aligned}$$

Jede  $|E| \times |E|$  Matrix mit diesen Eigenschaften heißt auch stochastische Matrix. Zur Klassifikation der Zustände nach Erreichbarkeit sind folgende Bezeichnungen üblich: Eine Menge  $C$  von Zuständen wird als abgeschlossen bezeichnet, wenn kein Zustand aus der Menge  $E \setminus C$  erreichbar ist. Nicht abgeschlossene Mengen heißen offen. Ein Zustand wird als rekurrent bezeichnet, wenn die Chance für eine Rückkehr = 1 ist, ansonsten als transient (FELLER, 1966, S. 384 ff). Die Schadklassen 0 bis 3 bilden demnach eine transiente und die Schadklasse 4 eine rekurrente Klasse.

Rechnet man die Übergangshäufigkeiten aus Tabelle 1 in Übergangswahrscheinlichkeiten um, so erhält man für die Aufnahmeperiode 1983/1984 folgende Übergangsmatrix  $P_{83/84}$ :

$$P_{83/84} = \begin{bmatrix} 0,2281 & 0,4365 & 0,3257 & 0,0091 & 0,0006 \\ 0,1079 & 0,4101 & 0,4632 & 0,0186 & 0,0003 \\ 0,0320 & 0,2371 & 0,6340 & 0,0958 & 0,0011 \\ 0,0132 & 0,0433 & 0,3823 & 0,4840 & 0,0772 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Das Produkt der Zustandsverteilung  $p(t)$  und der Matrix  $P$  (nach 2.3) ergibt die Zustandsverteilung  $p(t+1)$ . Für das einzelne Tupel des Vektors  $p(t+1)$  gilt:

$$p_j(t+1) = \sum_{i \in E} p_i(t) p_{ij} \quad (2.5)$$

Werden die Zustandswahrscheinlichkeiten mit der Beobachtungsstammzahl  $N$  multipliziert, erhält man die entsprechenden Schadhäufigkeiten.

Die Versuchsanlage sieht eine Serie von Beobachtungen an den gleichen Bäumen vor. Gilt bei abzählbarem Zustandsraum  $E$ , daß der Folgezustand von  $S_t$  unabhängig von den vorangegangenen Zuständen  $S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, S_0$  zu sehen ist – d. h.

für alle  $t$  aus  $\mathbb{N}_0$  und für alle  $i, j, i_{t-1}, i_{t-2}, \dots, i_0$  aus  $E$  gilt,

$$P\{S_{t+1} = j | S_t, S_{t-1}, \dots, S_0\} = P\{S_{t+1} = j | S_t\}$$

so nennt man dies einen stochastischen Prozeß  $S = \{S_t, t \text{ aus } \mathbb{N}_0\}$ . Sind diese letzten Bedingungen erfüllt, heißt der Prozeß Markov-Kette. Da die Zukunft des Prozesses nur von dem „gegenwärtigen“ Zustand und nicht von den „vergangenen“ Zuständen abhängig ist, spricht man auch von Gedächtnislosigkeit. Die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p_{ij}(t+1, t) = P\{S_{t+1} = i | S_t = j\} \quad (2.6)$$

wird einschrittige Übergangswahrscheinlichkeit genannt.

Eine Markov-Kette heißt genau dann homogen, wenn die einschrittigen Übergangswahrscheinlichkeiten von  $t$  unabhängig sind. Der Prozeß ist dann eine Markov-Kette mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten.

Unter der Annahme stationärer Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}(t) = p_{ij}$ , kann aus der Serie von Schadbeobachtungen folgender Maximum-Likelihood-Schätzwert für die Übergangswahrscheinlichkeiten angegeben werden (FAHRMEIR et al., 1981, S. 68):

$$\hat{P}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^T N_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^T N_i^{t-1}} \quad (2.7)$$

Die Baumartengruppe Fichte/Tanne hatte nach (2.7) folgende Übergangsmatrix:

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 0,2367 & 0,4423 & 0,3112 & 0,0092 & 0,0006 \\ 0,1133 & 0,3983 & 0,4737 & 0,0190 & 0,0002 \\ 0,0605 & 0,2467 & 0,6071 & 0,0850 & 0,0007 \\ 0,0111 & 0,0547 & 0,3913 & 0,4883 & 0,0547 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix} \quad (2.8).$$

Durch sukzessive Multiplikation einer Anfangszustandsverteilung  $p(0)$  mit der Matrix  $P$  kann auf die Zustandsverteilung  $p(n)$  nach  $n$  Jahren geschlossen werden. Durch direktes Nachrechnen ergibt sich:

$$\begin{aligned} p(1) &= p(0)P \\ p(2) &= p(1)P = [p(0)P]P = p(0)P^2 \text{ und} \\ p(n) &= p(0)P^n \end{aligned} \quad (2.9).$$

Die Matrix  $P^n$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Übergang von  $i \rightarrow j$  in genau  $n$ -Schritten verläuft. Diese  $n$ -schrittigen Übergangswahrscheinlichkeiten werden Chapman-Kolmogorov-Gleichungen genannt (FELLER, 1966, Bd. 1, S. 382 ff. und S. 420 ff.) und stellen die Grundlage für eine mögliche Prognose<sup>1)</sup> des Schadzustandes dar. Es bleibt festzuhalten, daß diese erst dann als abgesichert gelten kann, wenn die Homogenität des Prozesses bewiesen ist. Dies ist erst nach längerem Beobachtungszeitraum möglich. Sollte die Homogenität durch eine Verbesserung des Zustandes gestört sein, so wäre dies nur wünschenswert. Ansonsten muß die Modellbildung geeignet verändert werden ( $n$ -schrittige Markov-Ketten oder nichtstationäre Prozesse).

Für die Baumartengruppe Fichte/Tanne wurden über (2.9) die Zustandsverteilungen von 1983 bis zum Jahr 2003 in 5jährigen Schritten berechnet. Für die Jahre 1984 bis 1985 sind zum Vergleich die tatsächlichen Zustandsverteilungen anzugeben:

$$\begin{aligned} p(1983) &= (0,265, 0,535, 0,175, 0,021, 0,004) \text{ Anfangs-} \\ &\hspace{10em} \text{zustands-} \\ &\hspace{10em} \text{verteilung} \\ p(1984) &= (0,134, 0,372, 0,450, 0,038, 0,006) \\ &\hspace{10em} \{0,124, 0,378, 0,453, 0,039, 0,006\} \leftarrow \text{beobachtet} \\ p(1985) &= (0,102, 0,319, 0,506, 0,065, 0,008) \\ &\hspace{10em} \{0,110, 0,312, 0,505, 0,064, 0,008\} \leftarrow \text{beobachtet} \\ p(1988) &= (0,086, 0,285, 0,513, 0,094, 0,022) \\ p(1993) &= (0,082, 0,274, 0,498, 0,095, 0,051) \\ p(1998) &= (0,080, 0,266, 0,483, 0,093, 0,079) \\ p(2003) &= (0,077, 0,258, 0,469, 0,090, 0,106) \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Zustandsvektoren mit den Beobachtungsdaten (in geschweiften Klammern) zeigt, daß sich die Schätzungen in einem sehr günstigen Bereich bewegen (Fehler  $< 1\%$ ). Die Zahl der bis ins Jahr 2003 abgestorbenen Bäume liegt mit ca. 11 % relativ niedrig, wobei zu bedenken ist, daß hier nur die Bäume erfaßt sind, die tatsächlich wegen Schädigung entnommen wurden. Der normale Stammabgang (Ernte, Durchforstungen etc.) wurde ausgenommen. In der Periode 1983 bis 1984 wurden im Gesamtkollektiv ( $N_g = 26284$ ) der Baumartengruppe Fichte/Tanne 605 Bäume geerntet. Von diesen wurden 115 Bäume (ca.  $1/6$ ) wegen Schädigung entnommen.

Durch eine modifizierte Betrachtung des Grenzübergangs von  $P^n$   $n \rightarrow \infty$  ist eine weitergehende Auswertung möglich. So läßt sich dadurch die Frage, wie oft ein transienter Zustand  $j$  beim Start in  $i$  besucht wird, oder wie lange ein Baum durchschnittlich lebt, beantworten.

$$r_{ij} = E(M_{ij} | S_0 = i) \quad (2.10)$$

stellt die erwartete Anzahl von Besuchen in  $j$  beim Start in  $i$  dar.  $R = (r_{ij})$  heißt Potentialmatrix. Um die Aufenthaltszeiten in transienten Zuständen zu errechnen wird die Matrix  $P$  zerlegt in

<sup>1)</sup> „Eine Prognose ist immer eine schwierige Sache, besonders für die Zukunft.“ KARL VALENTIN.

$$P = \begin{bmatrix} Q & L \\ 0 & K \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} Q \text{ (Teilmatrix der transienten Zustände)} \\ K \text{ (Teilmatrix der rekurrenten Zustände)} \end{matrix}$$

Die Potentialmatrix  $R$  berechnet sich durch:

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} P^n = \begin{bmatrix} \Sigma Q^n & \Sigma L^{(n)} \\ 0 & \Sigma K^n \end{bmatrix}$$

Da die Teilmatrizen  $K$  und  $L$  gegen  $\infty$  streben (siehe FELLER, 1966, S. 384 ff. und S. 428 ff.), genügt es, sich auf den Grenzübergang der Fundamentalmatrix  $M = \Sigma Q^n$  zu beschränken.

Durch Umformungen erhält man

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n = I + Q + Q^2 + Q^3 + \dots \text{ und wegen}$$

$$MQ = Q + Q^2 + Q^3 + \dots = M - I \text{ folgt}$$

$$M - MQ = I, M(I - Q) = I.$$

Bei einer endlichen Anzahl transienter Zustände ist die Existenz der Inversen gesichert und es gilt:

$$M = (I - Q)^{-1} \quad (2.11).$$

Aus  $M$  läßt sich durch Zeilensummutation die mittlere Absorptionszeit  $r_i$  berechnen, welche die Besuchszeiten in transienten Zuständen vor Absorption in der rekurrenten Klasse  $S_4$  angibt. Einfacher: wie lange lebt ein Baum der Schadklassen 0 bis 3, bis er abgestorben ist?

$$r_i = \sum_j r_{ij}, \quad i, j = 0 \dots 3; \text{ (transient)} \quad (2.12)$$

Für die geschätzte Matrix  $P$  (2.8) erhält man als Fundamentalmatrix  $M$ :

$$M = \begin{bmatrix} 15,9 & 49,2 & 88,6 & 16,8 \\ 14,8 & 49,9 & 88,6 & 16,8 \\ 14,5 & 48,3 & 89,0 & 16,8 \\ 13,0 & 42,3 & 79,5 & 16,9 \end{bmatrix} \quad (2.13).$$

Interpretation: ein Baum bewegt sich durchschnittlich 170,5, 170,1, 168,6 und 151,7 Jahre in den Schadklassen  $S_0, S_1, S_2$  und  $S_3$ , bis er stirbt. Bedenkt man, daß die untersuchten Bäume alle ein Alter über 60 Jahre aufweisen, dann wirken die Zahlen bezüglich der Flächennachhaltigkeit und eventueller Fragen der Umtriebszeit noch ausgesprochen beruhigend.

### 3. ERGEBNISSE

Für die übrigen Baumartengruppen wurden die gleichen Berechnungen wie bei der Fi/Ta-Gruppe durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeiten der Übergangsmatrizen nahmen nach Formel (2.7) folgende Werte an:

$$\hat{P}_{KI/L\ddot{A}} = \begin{bmatrix} 0,3187 & 0,4385 & 0,2343 & 0,0075 & 0,0011 \\ 0,2345 & 0,4394 & 0,3152 & 0,0100 & 0,0009 \\ 0,1538 & 0,4570 & 0,3499 & 0,0269 & 0,0023 \\ 0,0502 & 0,2129 & 0,3565 & 0,2201 & 0,1603 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}$$

$$\hat{P}_{BU} = \begin{bmatrix} 0,4478 & 0,3743 & 0,1710 & 0,0065 & 0,0004 \\ 0,2374 & 0,4398 & 0,3025 & 0,0203 & 0,0000 \\ 0,1859 & 0,3286 & 0,4286 & 0,0548 & 0,0020 \\ 0,0917 & 0,1835 & 0,4312 & 0,2110 & 0,0862 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}$$

$$\hat{P}_{EI} = \begin{bmatrix} 0,4172 & 0,4670 & 0,1143 & 0,0010 \\ 0,1998 & 0,4947 & 0,3024 & 0,0031 \\ 0,1008 & 0,3488 & 0,5259 & 0,0245 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,6667 & 0,3333 \end{bmatrix}$$

Bei der Eichengruppe konnten die Übergänge zur Schadklasse 4 entfallen, da hier nur ein Baum der Schadklasse 1 abgestorben war. Als auffallendes Merkmal ist bei allen Matrizen die Summe der Wahrscheinlichkeiten links der Hauptdiagonalen bei  $S_0$  und  $S_1$  immer kleiner als 0,5. Das bedeutet, daß sich der Schadzustand nicht verbessert.  $S_2$  und  $S_3$  verbessern sich nur relativ. Hier sind die höchsten Absterberaten zu verzeichnen.  $Fi/Ta$  besitzt von allen Baumartengruppen die stärkste Verschlechterungstendenz in  $S_0$  bis  $S_3$ . Die jährlichen Übergangsmatrizen in Verbindung mit der mittleren Übergangsmatrix (nach 2.8) stellen einen sensiblen Indikator für Verbesserungen oder Verschlechterungen dar. Die Homogenität des Prozesses konnte wegen des kurzen Beobachtungszeitraumes noch nicht sinnvoll auf Signifikanzunterschiede getestet werden. Aus den Übergangsmatrizen wurde nach (2.9) auf den zukünftigen Schadzustand geschlossen. Die Zustandsverteilungen (Abb. 1) sind in 10-jährigen Schritten graphisch dargestellt.

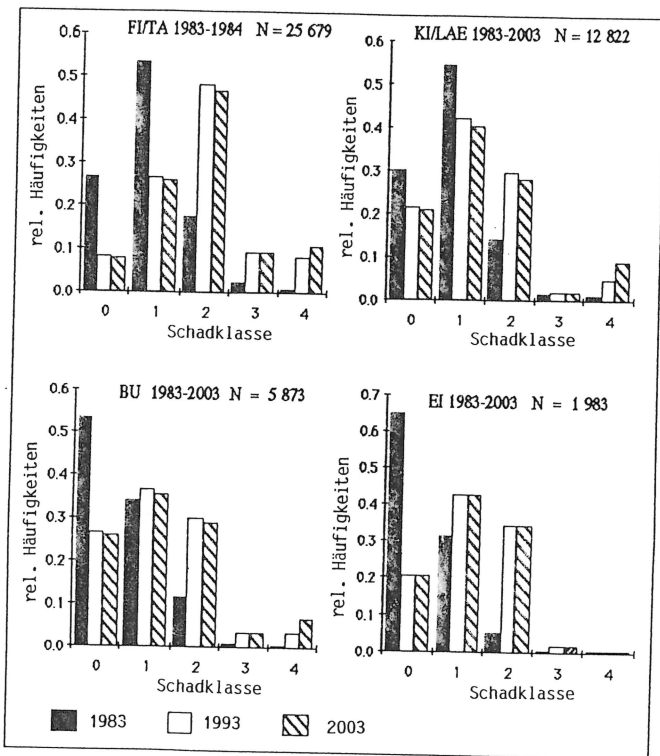


Abb. 1

Zustandsverteilungen der wichtigsten Baumartengruppen in 10-jährigen Schritten

Distributions of damage categories (state vectors) for the most important tree species groups; 10-years periodic intervals

Die Werte der Schadklasse 4 für  $Fi/Ta$ ,  $Ki/Lä$  und  $Bu$  liegen im Jahr 2003 bei 11 %, 9 % und 7 %. Bei der Gruppe  $Ei$  pendelt sich wegen der geringen Absterberate (0,35 %) ab 1983 ein „stabiler“ Endzustand ein. Der Grund liegt darin, daß die Übergangsmatrix fast „ergodisch“ ist (FAHRMEIR et al., 1981, ähnlich bei SUZUKI, 1984), d. h.

nach einer gewissen Zeit wird der Vektor der Schadverteilungen durch die Matrix kaum noch bewegt.

Zum Abschluß wurde noch die mittlere Verweildauer über (2.11) von  $Ki/Lä$  und  $Bu$  in den Schadklassen 0 bis 3 berechnet. Diese lag zwischen 233 und 185 Jahren resp. zwischen 283 und 253 Jahren. Falls sich die Prozesse im Durchschnitt nicht wesentlich ändern, wird von Ausnahmegebieten abgesehen die Absterberate relativ niedrig bleiben.

#### 4. ZUSAMMENFASSUNG

Ein Symptom der neuartigen Waldschäden ist der Laubverlust. Die Schadveränderung von einer Schadklasse zur anderen wird über Markov-Ketten mit einschrittigen Übergangswahrscheinlichkeiten dargestellt. Bei vorausgesetzter Homogenität des Prozesses läßt sich daraus auf den zukünftigen Schadzustand und die mittlere Zeit schließen, bis Bäume absterben. Aus den jährlichen Übergangsmatrizen kann die Verbesserung oder Verschlechterung der Erkrankung abgelesen werden.

#### 5. Summary

Title of the paper: *The use of Markov-chains for the description of state and development of pollutiv damage of the main bavarian tree species.*

A symptom indicating the degree of pollution damage to forest trees is loss of leaf mass. Transition from one category of tree damage to another is modelled using Markov-chains with single-step transition probabilities. Assuming, that the process is homogeneous, an estimate is presented of the expected time till tree death, and of the future state vector of damage. The annual transition matrices reflect the improvement or deterioration of tree condition.

#### 6. Résumé

Titre de l'article: *Les chaînes de Markov pour décrire le niveau des dommages et leur évolution.*

Les pertes de feuillage constituent un symptôme de l'actuel dépérissement des forêts. La modification des dommages quant on passe d'une classe à une autre est décrite avec une grande précision à l'aide des chaînes de Markov.

Compte tenu de l'homogénéité présumée du processus, on peut prévoir le niveau futur des dommages et le temps moyen qui s'écoulera jusqu'à la mort des arbres. A partir des «matrices de gradation annuelles», on peut déterminer s'il y a amélioration ou aggravation de l'état sanitaire.

J. M.

#### 7. Literatur

- FAHRMEIR, L., KAUFMANN, H. und OST, F.: Stochastische Prozesse. Hanser, München-Wien. 366 S., 1981
- FELLER, W.: An introduction to probability theory and its applications. I/II, Wiley, New-York. 509/669 S., 1966
- KENNEL, E. und ZWIRGELMAIER, G.: Waldschadensinventur Bayern 1984. Schrft. Forstw. Fac. München u. Bayer. Forstl. Vers.- u. Forsch.-Anst., Nr. 64. 101 S., 1985
- SUZUKI, T.: Gentan-Wahrscheinlichkeit, Vorhersagemodelle für die Entwicklung des Normalwaldes und für die Planung des Holzaufkommens. Schrft. Forstl. Fac. Univ. Göttingen, Bd. 76. S. 7-22, 1983

## Buchbesprechungen

Wald- und Wasser-Prozesse im Wasser- und Stoffkreislauf von Waldgebieten. Tagungsbericht über das Symposium Grafenau, veranstaltet vom Deutschen Verband für Wasserwirtschaft und Kulturbau, Fachausschuß 1.8 „Wald und Wasser“, dem Internationalen Verband Forstlicher Forschungsanstalten, Arbeitsgruppe S

1.03.02 „Forsthydrologie“, sowie der Nationalparkverwaltung Bayerischer Wald. Nationalparkverwaltung Bayerischer Wald, Tagungsbericht 5. Zwei Bände. Herausgeber Nationalparkverwaltung Bayerischer Wald, Grafenau. 1985. 682 Seiten mit 233 Abbildungen und 63 Tabellen.