# Ausgleich von Häufigkeitsverteilungen mit Hilfe der Beta-Funktion

F. ZÖHRER[1])

Aus dem Institut für Ertragskunde der Forstlichen Forschungsanstalt München

*Gliederung*



## 1. Einleitung

In der forstlichen Ertragskunde wie auch in vielen anderen Gebieten der Wissenschaft, Wirtschaft und Technik spielen Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Meßdaten über den zugeordneten Argumenten eine große Rolle. Dabei ist es aus manchen Gründen zweckmäßig, konkrete Verteilungen durch mathematisch formulierte Verteilungsfunktionen auszudrücken.

Oft zeigen die Verteilungen die bekannte symmetrische Glockenform und lassen sich dann meist durch die Gaußsche Normalverteilung (1) zufriedenstellend ausgleichen:

$$f^N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{1}$$

x . . . . Merkmalswert (Zufallsvariable)
$f^N(x)$ . Häufigkeit
$\mu$ . . . arithmetisches Mittel
$\sigma$ . . . Standardabweichung

Die Verteilung von Zufallsvariablen, die nur wenig von der Normalverteilung abweichen (Schiefe, Exzeß), lassen sich nach RIEDWYL (1967) meist gut durch die Gram-Charlier-Verteilung (2) oder die Edgeworth-Verteilung (3) ausdrücken[2]):

$$f^G(x) = f^N(x)\left[1 + \frac{\gamma_1}{3!}H_3(z) + \frac{\gamma_2}{4!}H_4(z)\right] \tag{2}$$

$$f^E(x) = f^N(x)\left[1 + \frac{\gamma_1}{3!}H_3(z) + \frac{\gamma_2}{4!}H_4(z) + \frac{\gamma_1^2}{72}H_6(z)\right] \tag{3}$$

In den Funktionen (1) bis (3) bedeuten:

$f^N(x)$ . . Gaußsche Normalverteilung
$\gamma_1$ . . . Maß für die Schiefe
$\gamma_2$ . . . Maß für den Exzeß
z . . . . $\dfrac{x-\mu}{\sigma}$
$H_3(z)$ . . drittes Hermitesches Polynom $= z^3 - 3z$
$H_4(z)$ . . viertes Hermitesches Polynom $= z^4 - 6z^2 + 3$
$H_6(z)$ . . sechstes Hermitesches Polynom $= z^6 - 15z^4 + 45z^2 - 15$

[1]) Dozent Dr. Fr. FRANZ in Dankbarkeit gewidmet.
[2]) Für diesen Hinweis danke ich Dr. KENNEL.

Diese beiden Verteilungen beinhalten außer der Normalverteilung auch deren Ableitungen höheren Grades, wodurch eine bessere Anpassungsfähigkeit erreicht wird. Nach Untersuchungen des Verfassers können mit Hilfe der Beta-Verteilung sowohl symmetrische Verteilungen als auch Verteilungen mit extremer Schiefe approximiert werden, wie sie z. B. bei Stammzahlverteilungen über dem Durchmesser (Durchmesserverteilungen) in sehr jungen Altern auftreten.

## 2. Mathematische Formulierung, Beziehungen zu anderen Verteilungsfunktionen und Eigenschaften der Beta-Funktion

### 2.1 Mathematische Darstellung

Die Beta-Funktion wird definiert durch das Integral

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \tag{4}$$

x . . . . Merkmalswert
m, n . . Argumente der Beta-Funktion

(DEMING, 1950; van der WAERDEN, 1957; STANGE u. HENNING, 1966.)

Dieses Integral wurde bereits von EULER in seinen „Institutionales Calculi Differentiales" (St. Petersburg, 1768) in der Form

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{1-k/n}\,dx$$

dargestellt (DEMING, 1950) und wird auch manchmal als das erste Eulersche Integral bezeichnet.

k . . . . diminuierender Exponentialfaktor

Formel (4) stellt die vollständige Beta-Funktion dar, während das folgende Integral (5)

$$B_x(m, n) = \int_0^x x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \tag{5}$$

als unvollständige Beta-Funktion bezeichnet wird, wobei die Bedingung gilt:

$0 \leqq x \leqq 1$.

Vertauscht man die Argumente m und n, so gilt für die vollständige Beta-Funktion
$B(m, n) = B(n, m)$.

Die zugehörigen Dichtefunktionen

$$f(x)_{m,n} = x^{m-1}(1-x)^{n-1} \quad \text{und}$$
$$f(x)_{n,m} = x^{n-1}(1-x)^{m-1}$$

beschreiben dabei zwei gespiegelte Kurven mit gleichem Flächeninhalt.

Mittelwert M(x) und Varianz (Streuung) V(x)[3]) errechnen sich nach STANGE und HENNING (1966) aus den beiden folgenden Formeln (6) und (7):

$$M(x) = \frac{m}{m+n} \tag{6}$$

$$V(x) = \frac{m \cdot n}{(m+n)^2 \cdot (m+n+1)} \tag{7}$$

[3]) Beide Werte werden relativ ausgedrückt, d. h. auf die Variationsbreite bezogen.

Zu einer einfacheren Darstellung der Beta-Funktion kommen wir, indem wir die Exponenten m — 1 und n — 1 in (5) durch $\alpha$ und $\gamma$ ersetzen:

$\alpha = m - 1$
$\gamma = n - 1$
$B_x(m, n)' = f(x)$

Es ergibt sich folgende Formel, die verglichen mit anderen Verteilungsfunktionen (z. B. [1], [2], [3]) sehr einfach erscheint:

$$f(x) = x^{\alpha} (1 - x)^{\gamma} \qquad (8)$$

Im Gegensatz zur Integralfunktion (5) liegt hier in (8) die Beta-Verteilung als Dichtefunktion vor.
Diese Potenzfunktion zeigt eine gewisse Ähnlichkeit mit Zuwachsfunktionen (siehe auch Abb. 3 bis 5). Die zugeordnete Summenfunktion (Integral) entspricht dann einer Wachstumsfunktion. Die durch (8) dargestellte Kurve erstreckt sich über den Bereich 0 bis 1. Soll die Kurve den erweiterten Bereich 0 bis b umfassen, so muß anstelle der 1 die Konstante b in die Gleichung eingeführt werden:

$$f(x) = x^{\alpha} (b - x)^{\gamma} \qquad (9)$$

Wenn wir schließlich die Kurven links durch a begrenzen und die multiplikative Konstante const einführen, ist der allgemeine Fall mit (10) definiert (siehe KATTWINKEL, 1965).

$$f(x) = \mathrm{const} \cdot (x - a)^{\alpha} (b - x)^{\gamma} \qquad (10)$$

Der Merkmalswert x liegt dabei innerhalb der Grenzen $a \leqq x \leqq b$.

Die durch (10) beschriebene Kurve kann in der Abszissenrichtung frei verschoben werden (Wahl von a und b). Die Konstante const muß so gewählt werden, daß die Fläche unter der Kurve (Integral von a bis b) 1 (Wahrscheinlichkeitsverteilung) oder N (Häufigkeitsverteilung) ergibt.
In dieser Form kann die Beta-Verteilung sehr vielseitig verwendet werden. KATTWINKEL (1965) führt z. B. damit Zeitbedarfsschätzungen im Zusammenhang mit Problemen der Netzwerktechnik durch. Gerade in der forstlichen Ertragskunde gibt es zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten. Eine davon ist die Darstellung von Stammzahlverteilungen über dem Durchmesser und deren Entwicklung über längere Zeiträume.

#### 2.2 Beziehungen zu anderen Verteilungen

Die Beta-Verteilung gehört zu den stetigen Verteilungen, d. h. die Merkmalswerte (z. B. Durchmesser, Körpergröße) sind stetig veränderlich. Bei den Verteilungen diskreter Größen (z. B. Würfelversuch) sind hingegen die Merkmalswerte sprunghaft veränderlich.

Abb. 1 zeigt eine Übersicht über die wichtigsten Verteilungen und ihre Zusammenhänge. Wie ersichtlich, kann die Beta-Verteilung in die bekannte F-Verteilung übergeführt werden, aus der wiederum die t- und Chi²-Verteilung entwickelt werden können, etc. Eine in der Theorie der mathematischen Statistik sehr wichtige Funktion ist die Gamma-Funktion oder das 2. Eulersche Integral (WITTING, 1949)[4].

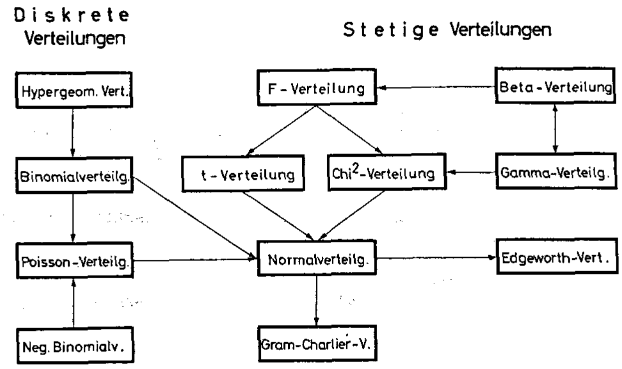



Abb. 1: Übersicht über die wichtigsten eindimensionalen Verteilungen und deren Beziehungen (nach STANGE und HENNING, 1966; geringfügig verändert).

Die Gamma-Funktion (11)

$$\Gamma(n) = \int_1^{\infty} x^{n-1} e^{-x} \, dx \qquad (11)$$

weist im Gegensatz zur Beta-Funktion nur ein Argument, nämlich n, auf. Sie ist auf der rechten Seite nach $\infty$ offen und entspricht in der Abb. 2 der mittleren Kurve. Wenn m und n ganze positive Zahlen sind, kann die vollständige Beta-Funktion durch vollständige Gamma-Funktionen ausgedrückt werden (DEMING, 1950; STANGE und HENNING, 1966; WEBER, 1956):

$$B(m, n) = B(n, m) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m + n)} = \frac{(m - 1)!\,(n - 1)!}{(m + n - 1)!}$$

#### 2.3 Eigenschaften der Beta-Funktion

Charakteristisch für die Beta-Funktion ist ihre Begrenztheit auf beiden Seiten. Im Gegensatz etwa zur Normalverteilung, die auf beiden Seiten die x-Achse erst bei $\infty$ erreicht oder etwa der F-Verteilung, die nur auf einer Seite offen ist, weist die Beta-Verteilung (Dichtekurve der eingipfeligen Form) bei a und b Nullstellen auf (dazu die Abb. 2).

Erstaunlich ist die große Flexibilität und Anpassungsfähigkeit der Beta-Verteilung. Wenn die in Exponentenform vorliegenden Argumente $\alpha$ und $\gamma$ verschiedene Größen annehmen, ergeben sich sehr unterschiedliche Kurven, von denen einige in den Abb. 3a bis c dargestellt sind. Dabei ist nur der für die Darstellung einer Verteilung interessierende Bereich a bis b berücksichtigt.
Die Beta-Funktion kann folgende Verteilungen beschreiben:

1. Symmetrische Verteilungen: Es besteht eine zur f(x)-Achse parallele Symmetrieachse.

a) *Eingipfelige Verteilungen mit Maximum* (Abb. 3a, 4a):
$\alpha = \gamma > 0$
$\alpha = \gamma > 1$:

[4]) Unter anderem bauen darauf auf:
die Rekursionsformel (DEMING, 1950),
der Multiplikationssatz von Gauß,
der Legendresche Satz und
die Stirlingsche Formel (WITTING, 1949).

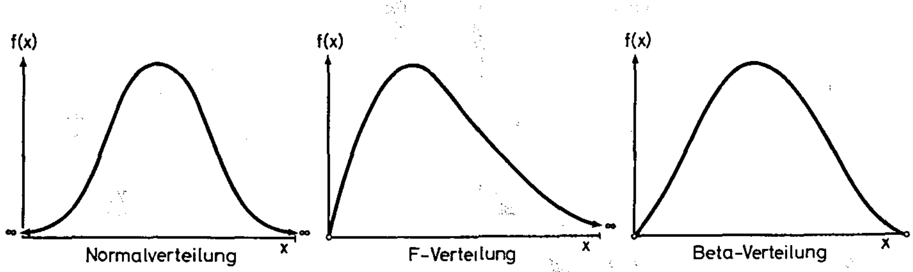



Abb. 2: Schematischer Vergleich einiger Verteilungskurven.

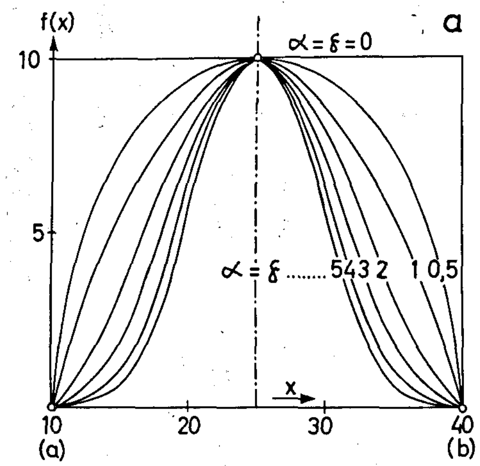
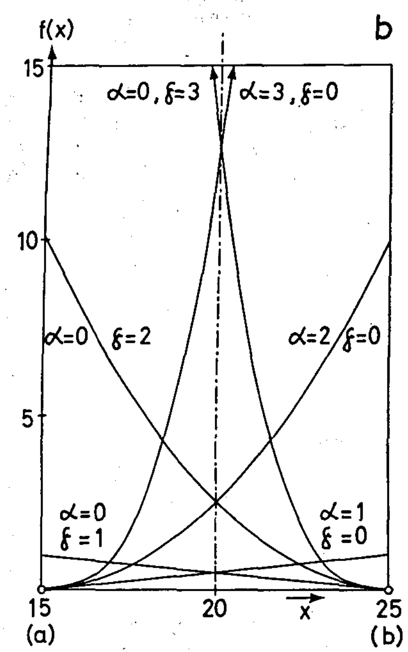
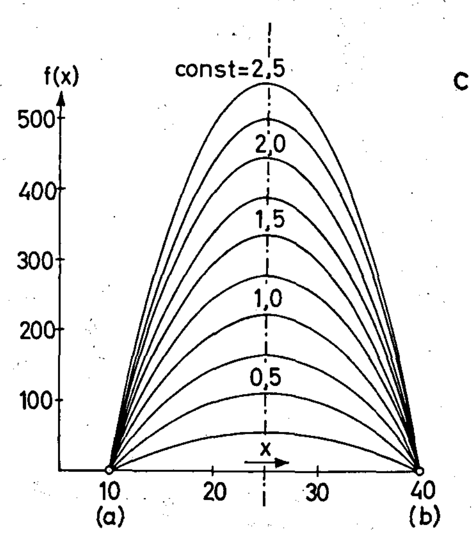



Abb. 3: a) Beta-Verteilung. $\alpha = \gamma$ (Symmetrische eingipfelige Verteilungen und Rechteckverteilung);




b) Beta-Verteilungen. $\alpha \leqq 0$, $\gamma > 0$ (Abnehmende Verteilungen) $\alpha > 0$, $\gamma \leqq 0$ (Zunehmende Verteilungen);




c) Beta-Verteilungen ($\alpha = \gamma = 1$) mit verschiedener Konstante (entspricht Maßstabsveränderung der f(x)-Achse).

Z. B. quadratische Parabel. Je größer $\alpha$ und $\gamma$ werden, um so flacher ist der Kurvenanlauf bei a und b. Bei Koeffizienten über 1 haben die Kurven einen Wendepunkt (wenn beide Koeffizienten über 1 sind, beidseitig des Maximums), der um so näher zur Symmetrieachse rückt, je höher $\alpha$ und $\gamma$ sind.

b) *Rechteckverteilung* (STANGE und HENNING, 1966) (Abb. 3a):
$\alpha = \gamma = 0$
Bei dieser Form der Verteilung ist die Häufigkeit der Merkmalswerte bzw. die Wahrscheinlichkeit des Auftretens bestimmter Merkmalswerte nicht von der Größe des Merkmalswertes abhängig.

c) *„Minimumverteilung“*: Die Kurven weisen ein Minimum auf, wenn
$\alpha = \gamma < 0$.

2. Nichtsymmetrische Verteilungen

a) *Eingipfelige Verteilungen mit Maximum*, wenn
$\alpha \neq \gamma$, beide $> 0$.
Linksschiefe Verteilungen, wenn $\gamma > \alpha$,
rechtsschiefe Verteilungen, wenn $\alpha > \gamma$.
ad linksschiefe Verteilungen: Hierher gehören z. B. Durchmesserverteilungen gleichaltriger undurchforsteter oder schwach niederdurchforsteter Bestände. Bei einem natürlichen Ausscheiden und bei geübter Niederdurchforstung wird nämlich vorwiegend der linke Ast der Verteilungskurve beschnitten (ASSMANN, 1961).

ad rechtsschiefe Verteilungen: Als Beispiel seien Höhenverteilungskurven gleichaltriger Bestände genannt, was nach ASSMANN (1961, S. 94) damit zusammenhängt, „daß die im Wuchs zurückbleibenden Bäume ihr Höhenwachstum auf Kosten des Durchmesserzuwachses forcieren, um wenigstens ihrem Kronengipfel ausreichenden Lichtgenuß zu erhalten“. Bei diesen Verteilungsformen wird die Schiefe um so größer, je mehr der Unterschied zwischen $\alpha$ und $\gamma$ zunimmt (dazu Abb. 4b).

b) *Abnehmende Verteilungen,* wenn $\alpha \leqq 0$ und $\gamma > 0$ (Abb. 3b).
Diese Verteilungsform finden wir z. B. bei Durchmesserverteilungen von Plenterwäldern oder gesamten Hochwald-Betriebsklassen. Eine interessante Arbeit über die mathematische Formulierung abnehmender Stammzahlverteilungen ist kürzlich von LOETSCH, HALLER und HENNING (1967) veröffentlicht worden.

c) *Zunehmende Verteilungen,* wenn $\alpha > 0$ und $\gamma \leqq 0$ (Abb. 3b),

d) *„Minimumverteilungen“*, wenn $\alpha \neq \gamma$, beide $< 0$.

Die Beta-Funktion kann als Wahrscheinlichkeitsverteilung wie auch als Häufigkeitsverteilung verwendet werden. Ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung erwünscht, so muß dafür gesorgt werden, daß das Integral

$$\text{const} \cdot \int_a^b (x - a)^\alpha \cdot (b - x)^\gamma \cdot dx = 1. \qquad (12)$$

Bei einer Häufigkeitsverteilung muß (12) eine Fläche von N (= Stichprobenumfang, Anzahl der Beobachtungen) ergeben. Die Konstante kann jederzeit so gewählt werden, daß dieser Bedingung Genüge geleistet wird.
In Abb. 3c sind einige Kurven dargestellt, die durch Variation der multiplikativen Konstanten entstehen. Ist const z. B. 0,5, so ist $f(x)_{max}$ ca. 110; ist const das Doppelte, nämlich 1,0, so ist $f(x)_{max} = 220$, also doppelt so groß. Die multiplikative Konstante kann folglich als Faktor für den Ordinatenmaßstab gedeutet werden.

Die Ausführungen in Kapitel 2.3 haben ergeben, daß es sich bei der Beta-Verteilung um eine sehr anpassungsfähige Funktion handelt. Die Bedeutung dieser Funktion zur Darstellung jeder Art von Verteilungen und Verteilungsreihen (z. B. Entwicklung von Durchmesserfrequenzen) ist so offensichtlich, daß es verwundert, wie wenig diese Verteilungsfunktion bisher in der forstlichen Biometrie verwendet wurde.

### 3. Möglichkeiten des Ausgleichs bzw. der Berechnung konkreter Verteilungen durch die Beta-Verteilung

#### 3.1 Berechnung von α und γ aus Mittelwert und Varianz

Aus den Formeln (6) und (7) können durch Substitution leicht die Argumente m und n abgeleitet werden, die um 1 vermindert, α und γ ergeben:

Aus Formel (6) ergibt sich

$$m = \frac{M(x) \cdot n}{1 - M(x)}.$$

Setzen wir $k = \frac{M(x)}{1 - M(x)}$, so erhalten wir $m = k \cdot n$.

Nach Formel (7) kommen wir zu

$$V(x) = \frac{n^2 \cdot k}{(n + k \cdot n)^2 \cdot (n + k \cdot n + 1)}$$

und erhalten durch Auflösung nach n

$$n = \frac{\frac{k}{V(x) \cdot (1 + k^2)} - 1}{(1 + k)}$$

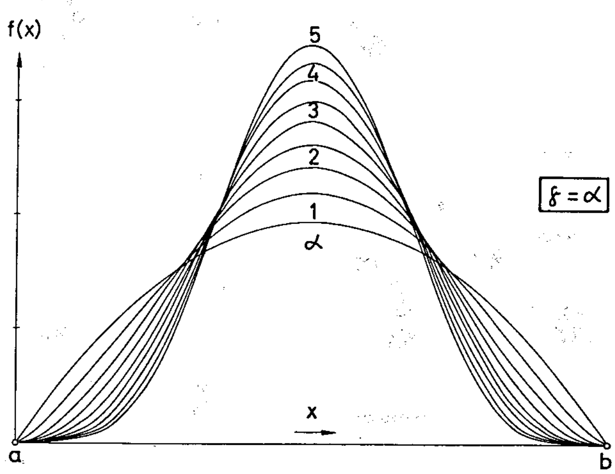
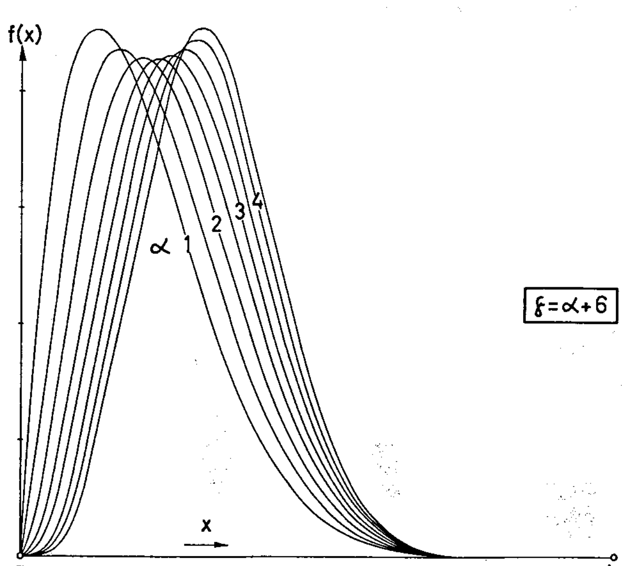



Abb. 4: a) Mit dem Elektronenrechner berechnetes Kurvennomogramm der Beta-Verteilung für symmetrische eingipfelige Verteilungskurven (α = γ).




b) Wie a (α + 6 = γ).

und $m = k \cdot n$.

Die Koeffizienten α und γ ergeben sich nach der Definition zu Formel (8):

$\alpha = m - 1$; $\gamma = n - 1$.

Bei dieser Berechnung werden Mittelwert M(x) und Varianz V(x) relativ ausgedrückt. Damit kann man leicht die gewünschten Verteilungskurven berechnen. Wenn sich die Berechnungen auf zahlreiche Verteilungen erstrecken, ist die elektronische Berechnung auf jeden Fall von Vorteil. Der Verfasser hat ein Programm für den Elektronenrechner entwickelt, das für beliebig viele Verteilungen die Argumente berechnet (ZÖHRER, 1968a).

Oft erweist es sich dabei als zweckmäßig, den gesamten Bereich (Variationsbreite) rechts zu erweitern, wodurch eine bessere Kurvenanpassung erreicht wird. Das ist v. a. bei stark linksschiefen Verteilungen der Fall (z. B. Stammzahlverteilungen junger Bestände). Es wäre ja auch bei größerem Stichprobenumfang ein Hinausrücken des maximalen Wertes zu erwarten.

Bei Durchmesser-Frequenzreihen ist eine einheitliche Erweiterung für alle Altersstufen zweckmäßig und nach bisherigen Erfahrungen durchaus möglich. Eine Verlängerung von 6 cm hat sich dabei als sehr günstig erwiesen. Mit dem oben erwähnten Programm können die Argumente α und γ für variable Verlängerungen berechnet werden (z. B. 0, 1, 2, ... 10 cm).

Bei extrem schiefen Verteilungen ist zu beachten, daß die Standardabweichung, bzw. deren Quadrat, die Streuung (Varianz) ziemlich problematische Größen sind, die nur beschränkte Aussagefähigkeit besitzen. Bei signifikanter Schiefe kann die Varianz nicht mehr in der üblichen Form interpretiert werden[5]). Trotz dieser Tatsache können auch bei extremen Verteilungen aus Mittelwert und Varianz Beta-Verteilungen hergeleitet werden, die die tatsächliche Verteilung gut repräsentieren.

#### 3.2 Auswahl der „besten" Verteilungskurve aus standardisierten Kurvennomogrammen[6])

Der Verfasser schrieb ein Programm, das für die verschiedensten α- und γ-Kombinationen Beta-Verteilungen berechnet, die sowohl über die Variationsbreite als auch über den Flächeninhalt der Kurve (Ordinatenhöhe) standardisiert wurden (ZÖHRER, 1968b). Die resultierenden Kurven wurden auf transparentem Millimeterpapier dargestellt, wobei jeweils Gruppen annähernd gleicher Schiefe (konstanter Unterschied zwischen α und γ) zusammengefaßt wurden. Die Abb. 4a und b bringen als Beispiel zwei solcher Nomogramme.

Legt man nun über eine konkrete, ebenfalls standardisierte Verteilung (Polygon oder Säulendiagramm) ein Kurvennomogramm passender Schiefe und bringt Anfangs- und Endpunkt der x-Achse zur Koinzidenz, so kann leicht die Beta-Verteilung ausgewählt werden, die die konkrete Verteilung am besten repräsentiert. Wenn erwünscht, können die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens bestimmter Merkmalswerte ohne Schwierigkeiten errechnet oder aus Beta-Tafeln (z. B. PEARSON, 1956) entnommen werden.

Dieses sehr rasch arbeitende Verfahren hat den großen Vorteil, daß jede einzelne Kurve individuell und sauber ausgeglichen werden kann, während bei bloßer Berechnung von α und γ ohne graphische Kontrolle bei bestimmten Verteilungen durchaus systematische Abweichungen

---

[5]) Nach frdl. mündlicher Mitteilung durch Doz. Dr. FRANZ. (Inst. f. Ertragskunde der FFA München).

[6]) Dieses Verfahren wurde gemeinsam mit Dr. KENNEL (Inst. f. Ertragskunde der FFA München) entwickelt. Dr. KENNEL möchte ich für die gute Zusammenarbeit herzlich danken.

[7]) Dabei ist zu beachten, daß Nullstellen nicht fixierbar sind. Wenn eine Klasse nicht besetzt ist, muß für f(x) ein Wert nahe 0 eingesetzt werden. Der dadurch entstehende Fehler ist vernachlässigbar.

von der wirklichen Verteilung auftreten können. Am besten dürfte aber eine Kombination beider Verfahren sein.

### 3.3 Regressionsanalytische Berechnung von α und γ

Durch Logarithmieren der Formel (10) erhält man folgenden Ausdruck:
$\ln(f(x)) = \ln \text{const} + \alpha \cdot \ln(x - a) + \gamma \cdot \ln(b - x)$
und in der Schreibweise der Regressionsanalyse[7])
$\ln y = b_0 + b_1 \cdot \ln x_1 + b_2 \cdot \ln x_2$.
Daraus ergibt sich:
$b_0 = \ln \text{const}$; $b_1 = \alpha$; $b_2 = \gamma$.

Diese Methode wurde bereits versuchsweise getestet, wobei das Standardprogramm SNAP für den Elektronenrechner IBM 7090 (KUNIN, 1961) verwendet wurde. Damit sich nicht abnehmende Verteilungen ergeben (z. B. bei extremer Linksschiefe), müßten gewisse Restriktionen für die Koeffizienten eingebaut werden.

Für Häufigkeits- bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilungen scheinen die unter 3.1 und 3.2 angegebenen Verfahren vorteilhafter zu sein. Wird aber z. B. die Beta-Funktion für den regressionsanalytischen Ausgleich von Zusammenhängen zwischen Variablen verwendet, erscheint diese Methode erfolgversprechend. Dabei wird es vielfach zweckmäßig sein, bestimmte Punkte (z. B. das Maximum) mit einem geeigneten Gewicht zu versehen und die Methode der gewichteten Regressionsanalyse anzuwenden. Auch dafür liegen Standardprogramme (z. B. die Programme WRAP und SNAP aus der SHARE-Bibliothek) vor.

## 4. Beispiele für die Anwendung der Beta-Verteilung

Abb. 5 zeigt, daß die Beta-Funktion auch für extrem linksschiefe Verteilungen geeignet ist. Es könnten noch extremere Beispiele gezeigt werden. Je extremer die Schiefe, um so weiter muß b rechts hinausgerückt werden, damit eine optimale Anpassung erzielt wird.

Wegen ihrer Beweglichkeit eignet sich die Beta-Funktion sehr gut für die Beschreibung von Durchmesserfrequenzreihen über beliebig lange Zeiträume der Bestandesentwicklung hinweg. Diese Tatsache ist für die Aufstellung von modernen Ertragstafelmodellen von großer Bedeutung.

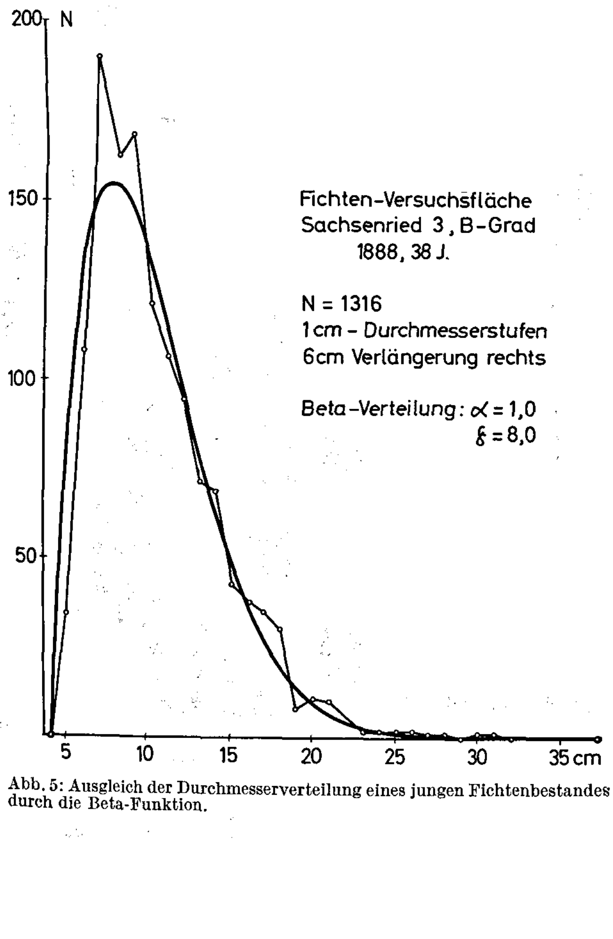



Abb. 5: Ausgleich der Durchmesserverteilung eines jungen Fichtenbestandes durch die Beta-Funktion.

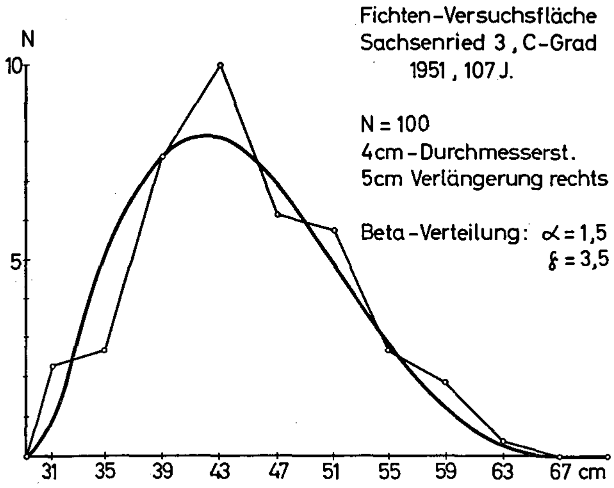



Abb. 6: Ausgleich der Durchmesserverteilung eines älteren Fichtenbestandes durch die Beta-Funktion (die Werte wurden mit der Formel von HOPMANN (1951) zur Bestimmung von Klassenanzahl und Klassenbreite von Häufigkeitsverteilungen bestimmt).

Abb. 6 zeigt die konkrete und durch die Beta-Funktion dargestellte Verteilung eines älteren, stark durchforsteten Fichtenbestandes. Auch hier können wir einen guten Ausgleich feststellen.

Für Zwecke der Forstinventur und Forsteinrichtung kann der Anteil bestimmter Durchmesserstufen (Sortimente) innerhalb beliebiger Beta-Verteilungen sehr einfach berechnet oder aus Beta-Tafeln entnommen werden. Bei einer großen Anzahl von Verteilungen dürfte die elektronische Berechnung auf jeden Fall von Vorteil sein.

Wenn man statt des Durchmessers die Grundfläche oder das Volumen der Einzelbäume auf der x-Achse aufträgt (oder Teilung in entsprechendem g- oder v-Maßstab), so erhält man durch Integration der Beta-Dichtefunktion (10) die Grundfläche bzw. das Volumen des Bestandes. Bei Integration beliebiger Durchmesserbereiche (z. B. ab 10, 15, 20 cm ∅; zwischen 40 und 55 cm ∅; größer als 65 cm ∅ etc.) ergibt sich deren Grundfläche und Volumen. Die Bedeutung solcher Angaben für die forstliche Planung liegt auf der Hand.

## 5. Zusammenfassung

1. Nach einer kurzen mathematischen Darstellung der Beta-Funktion und einer einleitenden Beschreibung der Beziehungen zu anderen Verteilungsfunktionen wird auf einige bemerkenswerte Eigenschaften der Beta-Funktion hingewiesen. Im Gegensatz zur Normalverteilung, die auf beiden Seiten offen ist, oder etwa der F-Verteilung, die nur links begrenzt ist, weist die Beta-Verteilung beidseitige Begrenzungen im endlichen Bereich (a und b) auf, was für die Beschreibung konkreter Verteilungen von Vorteil ist.

2. Eine weitere hervorstechende Eigenschaft der Beta-Funktion ist ihre außerordentliche Beweglichkeit. Durch verschiedene Kombinationen ihrer Argumente α und γ kann sie symmetrische und unsymmetrische Verteilungen, eingipfelige Verteilungen bis zu extremer Schiefe, abnehmende Verteilungen, Rechteckverteilungen, „Minimumverteilungen" und zunehmende Verteilungen beschreiben. Die multiplikative Konstante kann dabei so gewählt werden, daß eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (Integral = 1) oder eine Häufigkeitsverteilung (Integral = N) resultiert.

3. Drei Methoden der Darstellung konkreter Verteilungen mit Hilfe der Beta-Verteilung werden kurz beschrieben:
- Berechnung der Argumente aus Mittelwert und Varianz,
- Auswahl der „besten "Ausgleichskurve aus Kurvennomogrammen,

– Regressionsanalytische Berechnung der Argumente.

4. An Hand von zwei Beispielen (Durchmesserfrequenzen, Bayer. Fichten-Versuchsreihe Sachsenried 3) wird gezeigt, daß sich die Beta-Verteilung auch für extrem linksschiefe Verteilungsformen eignet.

5. Durch die mathematische Formulierung von Durchmesserverteilungen (und anderen Verteilungen) können im Zusammenhang mit der elektronischen Datenverarbeitung wertvolle Grundlagen für die ertragskundliche Forschung und die praktische Forsteinrichtung geschaffen werden.

## 6. Literatur


ASSMANN, E., 1961: Waldertragskunde. München—Bonn—Wien (BLV-Verlagsgesellschaft).

DEMING, W. E., 1950: Some theory of sampling. New York (J. Wiley & Sons).

HOPMANN, J., 1951: Forstmathematik in Forschung und Unterricht. Hann. Münden, Rotaprintdruck der Forstl. Fakultät (Buchh. E. Mayr).

KATTWINKEL, W., 1965: Über zwei Anwendungsmöglichkeiten von Netzwerken mit gerichteten Teilstrecken (directed graphs). IBM-Fachbibliothek, IBM-Form 78101.3.65.

KUNIN, M. J., 1961: Multiple regression analysis program SO SNAP, Nr. 183. Data Processing Department. New York (Programmbeschreibung).

LOETSCH, F., HALLER, K. E., und HENNING, N., 1967: Beitrag zur mathematischen Formulierung abnehmender Stammzahlverteilungen. XIV. IUFRO-Kongreß München, Section 25. Polykopie.

PEARSON, K., 1956: Tables of the incomplete beta-function. Cambridge (University Press).

RIEDWYL, H., 1964: Statistische Maßzahlen. Approximation empirischer Verteilungen. Bull. Gen. Electric, Mai 1967, Ref. Nr. Ch. 03.35.085 D.

STANGE, K. und HENNING, H.-J., 1966: Graf/Henning/Stange — Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Berlin—Heidelberg—New York (Springer).

VAN DER WAERDEN, B. L., 1957: Mathematische Statistik. Berlin—Göttingen—Heidelberg (Springer).

WEBER, E., 1956: Grundriß der biologischen Statistik, für Naturwissenschaftler, Landwirte und Mediziner. Jena (G. Fischer).

WITTING, A., 1949: Integralrechnung. Sammlung Göschen, Band 88. Berlin (W. de Gruyter & Co.).

ZÖHRER, F., 1968a: Berechnung der Argumente der Beta-Verteilung mit Hilfe von Mittelwert und Streuung. Unveröffentlichtes FORTRAN-IV-Programm (Institut f. Ertragskunde der FFA München).

ZÖHRER, F., 1968b: Berechnung standardisierter Beta-Verteilungen mit beliebigen Argumenten. Unveröffentlichtes FORTRAN-IV-Programm (Institut f. Ertragskunde der FFA München).



## Summary

*Fitting of frequency distributions with help of beta function.*

*The distribution of stem numbers in diameter classes is of great importance for forest science and practice. Until now this problem could not be solved in a sufficient way. The beta function shows a high flexibility and subsequently this function is very valuable for the description of diameter distributions and other asymmetrical forms of distributions.*

*In addition to a detailled mathematical description some methodes of computations are shown which are well adepted for electronic data processing.*